Module 2: Représentation des données

1 Introduction

Les informations traitées par un ordinateur peuvent être de différents types (textes, nombres, images, vidéos, etc). Toutefois, ces informations sont représentées et manipulées par l'ordinateur sous forme binaire. Par conséquent, toute information est traitée comme une suite de 0 et de 1. Le chiffre binaire 0 ou 1 représente l'unité d'information qu'on appelle **bit**.

Le codage d'une information consiste à établir une correspondance entre la représentation externe (réelle) de l'information (le nom *Isabelle* ou le nombre *811* par exemple), et sa représentation interne dans la machine, qui est une suite de bits (0 et 1)[1].

La représentation binaire est utilisée pour plusieurs raisons:

- Simple (manipulation de deux chiffres seulement);
- Facile à réaliser techniquement à l'aide des systèmes à deux états réalisés à l'aide de transistors;
- Les opérations arithmétiques de base comme l'addition, la soustraction sont faciles à exprimer en système binaire;
- Rapide (les opérations sont beaucoup plus rapides).

2 Représentation des nombres

Habituellement, on utilise la base 10 pour représenter les nombres. Le nombre 10 vient du fait qu'on a 10 chiffres de 0 à 9. En base 2 on utilise 2 chiffres (0 et 1), et en base b en général on utilise b chiffres pour représenter les nombres. Donc, c'est très important en premier lieu de comprendre ces différentes bases et comment on peut passer d'une base à une autre. On utilise souvent les bases suivantes: 2 (binaire), 8 (octale), 10 (décimale), et 16 (hexadécimale). On verra plus tard dans le cours, par des exemples, comment les nombres et caractères sont représentés dans ces différentes bases.

Nous allons tout d'abord voir comment les différents types de nombres sont représentés dans les différentes bases, par la suite nous présenterons la méthode qui nous permet de passer d'une base à une autre.

[1] La grande partie de ce module est tiré du livre: Architecture de l'ordinateur d'Emmanuel Lazard.

2.1 Représentation des nombres entiers

Les nombres entiers représentent la forme la plus simple des nombres. Par exemple, le nombre 2018 est représenté de la façon suivante:

$$2018 = 2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 8 \times 10^0 \tag{1}$$

Donc, pour obtenir le nombre 2018, il suffit d'additionner: 2 unités dans les millièmes, zéro unité dans les centièmes, une unité dans les dixièmes, et 8 unités dans les unièmes. Cela donne 2000 + 0 + 10 + 8 = 2018.

Dans le cas général, un nombre représenté dans une base b quelconque par une suite de chiffres $a_n a_{n-1} ... a_1 a_0$, est obtenu selon la formule suivante:

$$a_n a_{n-1} ... a_1 a_0 = \sum_{i=0}^{i=n} a_i b^i \tag{2}$$

Notez que a_n est le chiffre du poids fort, et a_0 est le chiffre du poids faible. Par exemple, pour le nombre 2018, 2 est le chiffre du poids fort et 8 est celui du poids faible.

> ***Notation:*** *pour indiquer qu'un nombre est représenté dans une base b, on écrit* $(nombre)_b$.

Exemple 2.1.

$(1011)_2 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 8 + 0 + 2 + 1 = 11$

$(1427)_{10} = 1 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 7 \times 10^0 = 1000 + 400 + 20 + 7 = 1427$

2.2 Représentation des nombres fractionnaires

Un nombre fractionnaire est un nombre qui comporte des chiffres après la virgule. Par exemple, le nombre 3,141 est représenté dans le système décimal comme suit:

$$(3,141)_{10} = 3 \times 10^0 + 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 1 \times 10^{-3} = 3 + 0,1 + 0,04 + 0,001 = 3,141 \tag{3}$$

La règle générale pour représenter les nombres fractionnaires dans une base b quelconque s'écrit comme suite:

$$a_n a_{n-1} ... a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} ... a_{-p} = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + a_0 b^0 + a_{-1} b^{-1} + ... + a_{-p} b^{-p} \tag{4}$$

Exemple 2.2.

$(256,05)_{10} = 2 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 6 \times 10^0 + 0 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} = 200 + 50 + 6 + 0 + 0{,}05 = 256{,}05$

3 Changement de base

Il arrive par fois de passer d'une base à une autre pour certaines applications. Par exemple, il est très commun de passer d'une base quelconque à la base décimale pour connaître les nombres. Pour cette raison, il est important de savoir comment le changement de base s'effectue. Notez que les passages sont possibles de toutes les bases vers toutes les autres bases comme le montre la Figure suivante:

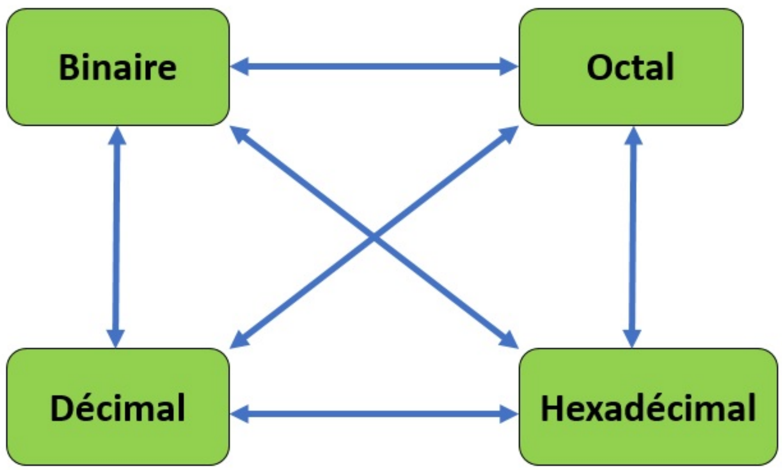

FIGURE 1 – Les passages possibles entre les différentes bases.

3.1 Passage d'une base quelconque à la base 10

Le passage à la base décimale est plus simple et requiert la représentation du nombre selon les formats présentés en haut. Par la suite, il suffit d'appliquer les opérations arithmétiques en décimal.

Par exemple, si on veut passer de la base 2 pour le nombre 10101 à la base 10, on procède comme suit: $(10101)_2 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 16 + 0 + 4 + 0 + 1 = 21_{10} = 21$

De la même façon, si on veut passer d'une base 16 (hexadécimale) pour le nombre FCAD à la base décimale, on procède comme suit: $(FCAD)_{16} = 15 \times 16^3 + 12 \times 16^2 + 10 \times 16^1 + 13 \times 16^0 = 61440 + 3072 + 160 + 13 = 64685_{10} = 64685$. Notez qu'en base hexadécimale, on utilise les chiffres 0, 1, 2, ..., 9 et les lettres A, B, C, D, E, et F. Ces lettres représentent les nombres suivant: A=10, B=11, C=12, D=13, E=14, F=15.

Pour un nombre représenté en base 8 (octale), on procède de la même façon.

Par exemple, le nombre $14_8 = 1 \times 8^1 + 4 \times 8^0 = 8 + 4 = 12_{10} = 12$. En base 10 (décimal), on peut omettre l'indice de la base.

3.2 Passage de la base 10 vers une base quelconque

Le passage de la base 10 vers une autre base est moins évident par rapport au passage d'une base quelconque à la base 10. Plus particulièrement avec les nombres fractionnaires. Dans ce qui suit, on va présenter ce passage avec les deux types de nombres soit les nombres entiers et les nombres fractionnaires.

3.2.1 Nombres entiers

Le passage de la base 10 vers une autre base quelconque se fait par des divisions successives sur la base vers laquelle on veut passer. C'est à dire, si on veut passer de la base 10 vers la base 2, on divise le nombre par 2, puis le quotient obtenu par 2, et ainsi de suite jusqu'à l'obtention d'un quotient nul (zéro). Le reste de chaque division représente les chiffres dans la nouvelle base. Le premier reste obtenu représente le chiffre avec le poids le plus faible, et le dernier reste obtenu représente le chiffre avec le poids le plus fort.

Exemple 3.1. Soit le nombre 1427 en base 10, et on veut le convertir à la base 8. On procède de la manière suivante:
$1427 \div 8 = 178$, le reste de la division $a_0 = 1427 - (178 \times 8) = 3$
$178 \div 8 = 22$, le reste de la division $a_1 = 178 - (22 \times 8) = 2$
$22 \div 8 = 2$, le reste de la division $a_2 = 22 - (2 \times 8) = 6$
$2 \div 8 = 0$, le reste de la division $a_3 = 2 - (0 \times 8) = 2$
Donc, le nombre $(1427)_{10} = (2623)_8$.

De la même façon, si on veut convertir le même nombre $(1427)_{10}$ en base 2, on procède comme suit:
$1427 \div 2 = 713$, le reste de la division $a_0 = 1427 - (713 \times 2) = 1$
$713 \div 2 = 356$, le reste de la division $a_1 = 713 - (356 \times 2) = 1$
$356 \div 2 = 178$, le reste de la division $a_2 = 356 - (178 \times 2) = 0$
$178 \div 2 = 89$, le reste de la division $a_3 = 178 - (89 \times 2) = 0$
$89 \div 2 = 44$, le reste de la division $a_4 = 89 - (44 \times 2) = 1$
$44 \div 2 = 22$, le reste de la division $a_5 = 44 - (22 \times 2) = 0$
$22 \div 2 = 11$, le reste de la division $a_6 = 22 - (11 \times 2) = 0$
$11 \div 2 = 5$, le reste de la division $a_7 = 11 - (5 \times 2) = 1$
$5 \div 2 = 2$, le reste de la division $a_8 = 5 - (2 \times 2) = 1$
$2 \div 2 = 1$, le reste de la division $a_9 = 2 - (1 \times 2) = 0$
$1 \div 2 = 0$, le reste de la division $a_{10} = 1 - (0 \times 2) = 1$
Donc, le nombre $(1427)_{10} = (10110010011)_2$.

3.2.2 Nombres fractionnaires

Dans le cas des nombres fractionnaires, le passage s'effectue en deux étapes: la conversion de la partie fractionnaire et puis la conversion de la partie entière comme on a vu dans la section précédente.

Pour la conversion de la partie fractionnaire, on multiplie la partie fractionnaire (après la virgule) par la base vers laquelle on veut passer, et on continue les multiplications jusqu'à ce que le résultat soit égal à 1. Pour la partie entière, on procède par divisions de la même manière que les nombres entiers.

Exemple 3.2. Soit le nombre 14,125 en base 10, et on veut le convertir à la base 2 par exemple. On procède de la manière suivante:

0,125 $\times$ 2 = 0,25, $a_{-1} = 0$
0,25 $\times$ 2 = 0,50, $a_{-2} = 0$
0,50 $\times$ 2 = 1,00, $a_{-3} = 1$

Donc, on arrête ici vu que le résultat est égal à 1, et on continue avec la partie entière en effectuant des divisions comme on a vu auparavant. Cela donne:

$14 \div 2 = 7$, $a_0 = 0$
$7 \div 2 = 3$, $a_1 = 1$
$3 \div 2 = 1$, $a_2 = 1$
$1 \div 2 = 0$, $a_0 = 1$

Donc, le résultat de conversion est: $(1110, 001)_2$

Notez qu'on peut avoir le cas où la résultat de multiplications pour la partie fractionnaire ne donne pas 1. Dans ce cas, les multiplications s'arrêtent lorsque la précision voulue est obtenue.

3.2.3 Nombres négatifs

La représentation des nombres négatifs en base 2 (binaire) se fait généralement en deux étapes distinctes: Une étape qui consiste à calculer le complément à 1, et une étape qui calcule le complément à 2.

Le calcul du complément à 1 consiste à remplacer tous les 0 par des 1 et tous les 1 par des 0. Par contre, le calcul du complément à 2 consiste à ajouter un 1 au complément à 1.

Exemple 3.3. Si on veut convertir le nombre (-4) de la base 10 (décimale) à la base 2 (binaire) on procède comme suit:

On convertit tout d'abord le nombre +4 à la base 2 pour obtenir la représentation binaire. Cela donne $(+4)_{10} = (00000100)_2$. Ici on utilise une représentation à 8 bits. Une fois la conversion du décimal au binaire est faite, l'étape suivante consiste donc à calculer le complément à 1 du $(00000100)_2$. En remplaçant les 1 par 0 et les 0 par des 1, on obtient $(11111011)_2$. Ensuite, on calcule le complément à 2 en ajoutant un 1 à (11111011) ce qui donne:

$(11111011)_2 + 1 = (11111100)_2 = (-4)_{10} = FC_{16}$.

Notez que le complément à 2 de 0 est 0. Comme on a vu lors du calcul du complément à 1, les opérations arithmétiques s'effectuent de la même façon qu'en système décimal. Une retenue est toujours applicable quand on dépasse la valeur de la base.